ref: Zuily Queffelec
p. 410

Leçon 220
221

Développement : Etude des solutions de l'équation de Hill Mathieu :

On considère l'équation différentielle du second ordre (E): $y'' + qy = 0$ où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction continue, paire et π périodique. Les solutions (à valeur complexe) forment un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2, que l'on note W. Par le théorème de Cauchy Lipschitz, on identifie W à $\mathbb{C}^2$ en associant $\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ à une solution y.

Une base de W est donc donnée par les solutions y_1 et y_2 de (E) tq $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$

On remarque que q est à valeur réelle implique que y_1 et y_2 à valeurs réelles. Soit y solution de (E) ; Alors $T_{-\pi}(y)$ est encore solution de (E):

En effet:

$$(T_{-\pi} y)'' + q(T_{-\pi} y) = T_{-\pi} y'' + T_{-\pi}(qy) = T_{-\pi}(y'' + qy) = 0$$

Ainsi $T_{-\pi}$ induit un endomorphisme de W, de matrice

$$A = \begin{bmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{bmatrix} \leftarrow$$

en effet: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
$A.y_1(x) = y_1(x+\pi) = a\, y_1(x) + b\, y_2(x)$
De plus $A y_1'(x) = a\, y_1'(x) + b\, y_2'(x)$
et on applique à $x = 0$.

Lemme :

1) y_1 et y_2 sont respectivement paire et impaire
2) $\det A = 1$
3) On a $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

Preuve lemme :

1) Comme q est paire, on remarque que $(\check{y}_1'' + q\,\check{y}_1)(t) = \check{y}_1''(t) + q(t)\, y_1(-t)$
$= y_1''(-t) + q(-t)\, y_1(-t) = 0$

Donc $\check{y}_1$ est aussi une solution de (E) et $\check{y}_1$ est telle que $(\check{y}_1(0), \check{y}_1'(0)) = (1,0)$ d'où $\check{y}_1 = y_1$ par unicité de Cauchy Lipschitz

De la même manière, on montre que $\check{y}_2 = -y_2$ i.e. y_2 est impaire.

⚠ $\check{y}'(t) = (y(-t))' = -y'(-t)$

2) Soit W le wronskien de y_1 et y_2. On a

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$
$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2'$$
$$= -y_1 \cdot q y_2 + q y_1 y_2$$
$$= 0$$

d'où W est constant. Ainsi, $W = W(0) = 1$ donc $\det A = W(\pi) = 1$.

3) La réciproque de $T_{-\pi}$ est T_π, dont la matrice est

$$B = \begin{bmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{bmatrix}$$

On $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = B$

d'où en identifiant : $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

<u>Théorème</u> : On note $T = \mathrm{tr}(A) = y_1(\pi) + y_2'(\pi)$.

A) si $|T| < 2$, toutes les solutions de (E) sont bornée

B) si $|T| = 2$, (E) admet une solution non nulle bornée

C) $|T| = 2$ ssi $y_1'(\pi) \cdot y_2(\pi) = 0$.

D) si $|T| > 2$, toute solution non triviale de (E) est non bornée.

<u>Preuve</u> :

Notons déjà que y_1 et y_2 étant à valeur réelle, on a T à valeur réelle. On a $\chi_A(X) = X^2 - TX + 1$ (si M matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(M) \cdot X + \det(M)$).

donc Δ (discriminant) $= T^2 - 4$.

$\boxed{A}$ Si $|T| < 2$, alors $\Delta < 0$ et χ_A admet deux racines complexes conjuguées, ρ et $\bar{\rho}$. La matrice A est ainsi diagonalisable, il existe (u, v) une base de W telle que

$$T_\pi u = \rho u$$
$$T_\pi v = \bar{\rho} v$$

On $1 = \rho \cdot \bar{\rho} = |\rho|^2$ donc les fonctions $|u|$ et $|v|$ sont continues et π périodiques, donc $|u|$ et $|v|$ sont bornées, donc u et v aussi. De plus, toute solution de (E) (i.e. tout élément de W) s'exprime comme combinaison linéaire de u et v, donc est borné.

$\boxed{B}$ Si $|T| = 2$, on a $\Delta = 0$ et χ_A admet une racine réelle double r, égale à ± 1 car $r^2 = 1$. Ainsi A admet une valeur propre, i.e. une solution u (non nulle) tq $T_\pi u = r u$. u est donc bornée.

$\boxed{C}$ Comme $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$, on a $|T| = 2$ ssi $y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \pm 1$, ce qui équivaut à $y_1(\pi) \cdot y_2'(\pi) = 1$ i.e. $y_1'(\pi) y_2(\pi) = 0$ car $\det A = 1$.

$\boxed{D}$ Enfin si $|T| > 2$, χ_A admet deux racines réelles r et r' avec $r . r' = \det A = 1$ donc $r' = r^{-1}$. Supposons $|r| > 1 > |r'|$.

Soit (u, v) une base de diagonalisation de A. Toute solution y non nulle de (E) s'écrit

$$y = a . u + b v \quad , (a,b) \neq (0,0) \qquad \text{car } \{u, v\} \text{ base de } W.$$

- Si $a \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$ n'annule pas u alors $\underbrace{y(x + n\pi)}_{= A^n x} = a . r^n . u(x) + b . r^{-n} v(x)$ qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.
- si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et si x n'annulle pas v, on a $y(x - n\pi) = b . r^n v(x)$ qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. $\blacksquare$

Application :

- Si $q = 1$, on obtient $y_1 = \cos$
  $y_2 = \sin$

La trace est alors $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) = -2$

Donc il existe des solutions bornées (en fait elles le sont toutes).

- si $q = -1$, on obtient $y_1 = ch$
  $y_2 = sh$

La trace est alors $T = y_1(\pi) + y_2'(\pi) = 2\, ch(\pi) > 2$

Il n'y a donc pas de solution bornée non nulle.

- Pour un q plus complexe, c'est difficile. Mais il suffit de pouvoir approximer y_1 et y_2 (avec un RK4 par ex).

- Historiquement, $q(t) = \cos(2t)$ était l'équation étudiée par Hill pour étudier le périgée de la lune, et $q(t) = \lambda - 2 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2t)$ équation étudiée par Mathieu étudiant l'équation d'onde d'une membrane elliptique.